

【 数学－ 1 】

以下の問に答えよ.

問 1 次の関数のマクローリン展開を第 3 項まで求めよ.

$$f(x) = \log(x^2 + 7x + 13)$$

問 2 次の極限值を求めよ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 5^x}{x}$$

問 3 積分領域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ として, 極座標変換を用いて次の積分を求めよ.

$$\iint_D (4x^2 + y^2) dx dy$$

【 数学－ 2 】

以下の問に答えよ.

問 1 曲面 $x^2y + y^2x + z^2y = 3$ 上の点 $P(0, 3, 1)$ について考える.

スカラー場 f を $f(x, y, z) = x^2y + y^2x + z^2y$ とするとき, 以下の問に答えよ.

(a) f の勾配 ∇f とその大きさ $|\nabla f|$ を求めよ.

(b) 単位法線ベクトル \mathbf{n} を求めよ.

(c) 接平面の方程式を求めよ.

問 2 次の (a), (b) の方程式を満たす複素数 z をそれぞれ求めよ. ただし, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位である.

(a) $e^z = -1 - i\sqrt{3}$

(b) $\cos z = \sqrt{2}$

【 物理－ 1 】

図1のような密封された箱の中の理想気体を考え、以下の間に答えよ．なお、箱の内側から壁面に垂直に向かう方向を x 軸とし、理想気体の種類は 1 種類、単位体積当たりの分子数を n 、質量は m 、速さを v とする．

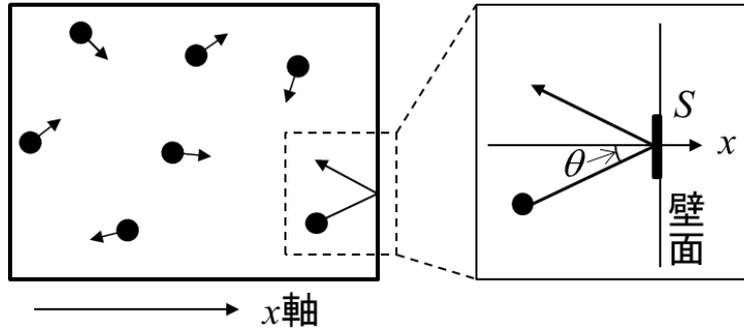


図1 理想気体分子と容器との衝突

- 問1 x 軸に垂直な壁面上に単位面積 S を考える． x 軸に対して角度 θ の方向から飛んできて、単位時間に壁面 S に完全弾性衝突する分子はどのような範囲に入っている分子であるか図示して説明し、その体積を式で示せ．
- 問2 問1の範囲の中で、 x 軸に対して θ から $\theta + d\theta$ までの角度をもつ分子数はどのように表されるか式で示せ．
- 問3 問2で解答した分子の全運動量変化から、分子が壁面に及ぼす圧力 p を求めよ．
- 問4 実際の気体分子は全て同じ速さで運動しているのではなく、いろいろ異なった速度をもっている．全分子の速度の2乗平均を $\langle v^2 \rangle$ で表し、理想気体の状態方程式を微視的な量で表現した場合、1個の分子の平均的な運動エネルギーが、問3の結果とボルツマン定数 k を用いて、 $\frac{3}{2}kT$ で表されることを示せ．なお、 T は絶対温度であり、必要があれば1モルの理想気体の分子数(アボガドロ数)を N_A 、体積を V 、気体定数を R として用いよ．
- 問5 問4の結果から分子の平均2乗平方根速度をボルツマン定数 k 、絶対温度 T 、質量 m を用いて表せ．また、理想気体分子の密度を ρ とした場合、2乗平均速度 $\langle v^2 \rangle$ が次式で表されることを示せ．

$$\langle v^2 \rangle = \frac{3p}{\rho}$$

【 物理－ 2 】

図 1 に示すような井戸型のポテンシャル ($V_0 > 0$) に, エネルギー $E (\geq 0)$ を持つ平面波の波動関数が, x の負の方向から正方向に向かって入射する場合を考える. このとき領域 $x \leq 0$, $0 \leq x \leq a$, $a \leq x$ における波動関数は, それぞれ

$$\begin{aligned}\psi_1(x) &= Ae^{+ikx} + Be^{-ikx} & (x \leq 0) \\ \psi_2(x) &= Ce^{+i\alpha x} + De^{-i\alpha x} & (0 \leq x \leq a) \\ \psi_3(x) &= Fe^{+ikx} & (a \leq x)\end{aligned}$$

と書ける. ここで A, C, F はそれぞれの領域における入射波の係数, B, D は反射波の係数であり, 波数 k, α は $k = (2mE/\hbar^2)^{1/2}$, $\alpha = (2m(E + V_0)/\hbar^2)^{1/2}$ と表せる. ここで i は虚数単位 ($i = \sqrt{-1}$), m は粒子の質量, \hbar はディラック定数 ($\hbar = h/2\pi$, h はプランク定数) である. 以上を踏まえて以下の間に答えよ.

問 1 波動関数の各係数を求めるために, $x = 0$ および $x = a$ において, 波動関数 $\psi(x)$ およびその微分 $d\psi(x)/dx$ が連続となる境界条件を課す. この条件を用いる理由を説明せよ.

問 2 問 1 の境界条件を用いて係数 A, B, C, D, F 間の関係式を求め,

$$\frac{F}{A} = \frac{4k\alpha e^{-i(k-\alpha)a}}{(k+\alpha)^2 - (k-\alpha)^2 e^{-2i\alpha a}}$$

となることを示せ.

問 3 このポテンシャルによる透過係数は, 問 2 の結果を用いて次式で与えられる.

$$\left| \frac{F}{A} \right|^2 = \frac{4k^2\alpha^2}{4k^2\alpha^2 + (k^2 - \alpha^2)^2 (\sin(\alpha a))^2}$$

透過係数が 0 となる場合の入射波のエネルギー E の条件を求めよ.

問 4 問 3 と同様に, 透過係数が 1 となる場合の入射波のエネルギー E の条件を求めよ. また, この場合の物理的意味について説明せよ.

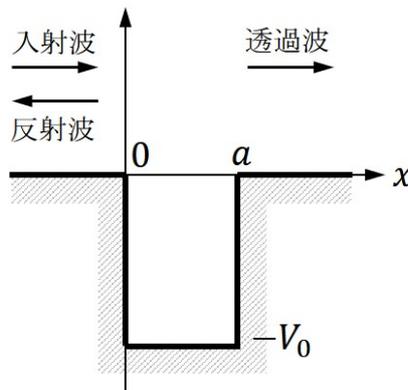


図 1 井戸型ポテンシャル

【 化学－ 1 】

固体表面における反応物質の吸着挙動は、流体中の不均一反応に対して大きな影響を与える。以下の問に答えよ。

問 1 下記の文中（ア）～（ク）にあてはまる適切な語句を記入せよ。

固体表面に存在する原子は、表面から離れた位置にある原子より大きな（ア）をもち、近接する流体中の分子やイオンなどの化学種と結合しやすくなるため、通常、これらの化学種の濃度は周囲の流体よりも増加する。この現象を吸着とよび、一般にエントロピーは（イ）する。また、吸着と逆の現象を（ウ）とよぶ。

吸着は、主にファンデルワールス力による（エ）吸着と、共有結合による（オ）吸着、およびクーロン力による静電吸着に分類できる。通常、吸着量は、加熱により（カ）し、加圧により（キ）する。特異なケースとして、界面における吸着質の濃度が周囲より低い場合を（ク）吸着とよぶ。

問 2 (a)～(c)の事項あるいは用語について、簡潔に説明せよ。

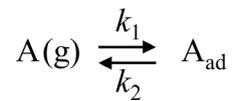
(a) 問 1 で解答した「（エ）吸着」および「（オ）」吸着」のそれぞれの特徴

(b) Henry の吸着等温式

(c) 解離吸着

(次ページに続く)

問3 固体表面への気相成分 A(g) の吸着に関して、以下を仮定する。



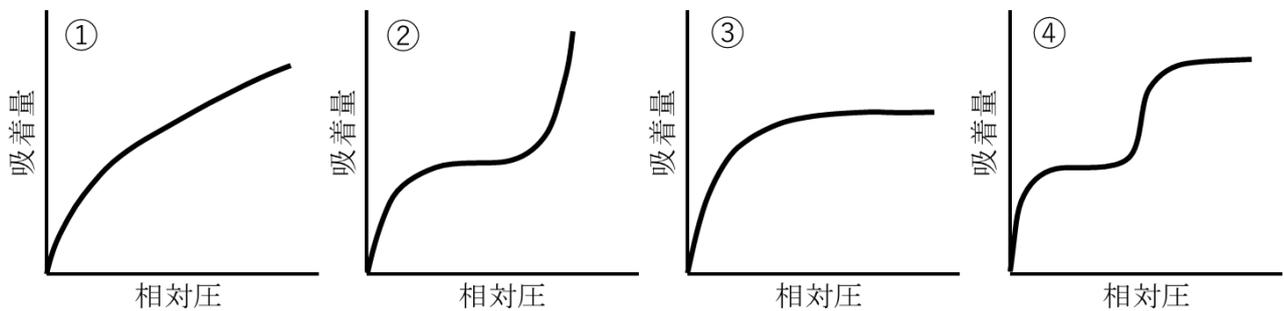
【 仮定 】

- (i) 気相分子は、固体表面に一定数存在する吸着サイトにのみ吸着する
- (ii) 1 つの吸着サイトには、1 つの気相分子が吸着する
- (iii) 全ての吸着サイトは、エネルギー的に等価である
- (iv) 吸着した気相分子間の相互作用は、無視できる

なお、 A_{ad} は吸着分子を表し、 k_1 および k_2 は、それぞれ右方向および左方向の速度定数である。

(a) 吸着平衡の状態にあるとき、吸着サイトの総数に対する吸着分子の数の割合（被覆率） θ を平衡定数 $K (= k_1/k_2)$ および A(g) の分圧 p_A を用いて表せ。

(b) この場合に得られる吸着等温線の形を以下の図①～④から選べ。またそのような吸着等温線を何（何型）とよぶか。



【 化学－ 2 】

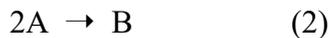
化学反応に関する以下の問に答えよ。ただし、求める値は有効数字 3 桁とし、気体定数 $R = 8.31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ 、 $\ln 2 = 0.693$ 、 $\ln 10 = 2.30$ とする。

問 1 物質 A が物質 B に変化するある溶液反応において、物質 A の初濃度が $0.2 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ であるとき、反応開始後 10 分でその 90% が反応した。

(a) 反応 (1) となる一次反応であるとき、反応速度定数と半減期をそれぞれ求めよ。



(b) 反応 (2) となる二次反応であるとき、反応速度定数と半減期をそれぞれ求めよ。



(c) 物質 A の初濃度を $0.02 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ (はじめの設定初濃度の $1/10$) とした場合、反応 (1) と反応 (2) における半減期をそれぞれ求めよ。また、これらの結果を踏まえ一次反応と二次反応での初濃度と半減期の関係についてそれぞれ述べよ。

問 2 アレニウス (Arrhenius) の式に従うある化学反応において、温度が 300 K から 310 K になることで反応速度定数が 2 倍になった。この反応の活性化エネルギー E_a を求めよ。

【材料化学－1】

金属チタンを生産するにはクロール法 (Kroll Process) とハンター法 (Hunter Process) がある。いずれも四塩化チタン (TiCl_4) を金属熱還元で金属チタンを得る方法である。還元剤としてクロール法ではマグネシウム (Mg), ハンター法ではナトリウム (Na) が用いられる。チタン原料は二酸化チタン (TiO_2) を主成分とする天然ルチル (Rutile), 合成ルチル, あるいはハイグレードチタニアスラグ (high grade titania slag) である。したがって, 金属チタンを得るまでには, ①塩化反応による四塩化チタン (TiCl_4) の生産工程, ②熱還元による金属チタンの生産工程, ③塩化物溶融塩電解による還元剤金属と塩素 (Cl_2) の生産工程を含む。工程①の塩化反応においては, 原料の TiO_2 のほかに反応に十分なコークスも加えている。この工程①についてはクロール法とハンター法は同じであるが, 工程②と工程③は還元剤に応じて違ってくる。

金属チタン生産について以下の間に答えよ。ただし, 計算に際しては, ファラデー定数 $F = 9.65 \times 10^4 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$, 元素原子量, Ti: 47.9, Mg: 24.3, Na: 23.0, 有効数字は3桁とする。 CO , TiO_2 , MgCl_2 , NaCl および TiCl_4 の標準生成エンタルピー, 標準生成ギブス自由エネルギーおよび有効温度範囲はそれぞれ以下のとおりである。

反応式		$\Delta H^\circ [\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}]$	$\Delta G^\circ [\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1}]$	$T [\text{K}]$
$\text{C} + 1/2\text{O}_2(\text{g}) = \text{CO}(\text{g})$	(1)	$-106 - 0.006T$	$-112 - 0.088T$	800 - 1200
$\text{Ti} + \text{O}_2(\text{g}) = \text{TiO}_2$	(2)	$-947 + 0.008T$	$-941 + 0.173T$	600 - 1100
$\text{Mg} + \text{Cl}_2(\text{g}) = \text{MgCl}_2$	(3)	$-620 + 0.020T$	$-600 + 0.114T$	980 - 1360
$\text{Na} + 1/2\text{Cl}_2(\text{g}) = \text{NaCl}$	(4)	$-423 + 0.015T$	$-409 + 0.090T$	400 - 1074
$\text{Ti} + 2\text{Cl}_2(\text{g}) = \text{TiCl}_4(\text{g})$	(5)	-762	$-762 + 0.120T$	600 - 1100

- 問1 クロール法とハンター法のそれぞれについて工程①, ②および③における化学反応もしくは電解のアノード反応, カソード反応および全体の電解反応を示せ。塩化反応の生成物は TiCl_4 のほかに副生成物として CO のみを考える。
- 問2 クロール法とハンター法において生成物の Ti と副生成物 CO のほかに, それぞれ4種の間生成物が存在し, 工程①, ②および③において循環される。それらの中間生成物の利用率が 100% の場合, 全体の総括反応は等しい。この総括反応を示せ。また, この総括反応の 1000 K における反応熱を計算せよ。
- 問3 1モルの Ti を得るために, 反応に必要な金属 Mg と Na の質量をそれぞれ計算せよ。
- 問4 工程③の溶融塩電解はエネルギー消費の最も高い工程である。電解温度を 1000 K とし, 問3の Mg と Na の質量を電解により得る際の反応熱を計算せよ。計算に際し, 反応物および生成物はすべて純物質として考えてよいとする。

(次ページに続く)

問5 電解温度を 1000 K とし，工程③の塩化物溶融塩電解の理論分解電圧をクロール法とハンター法のそれぞれについて計算せよ．計算に際し，反応物および生成物はすべて純物質として考えてよいとする．

【 材料化学－ 2 】

1570 K において 1 気圧の CO, CO₂ 混合ガスからなる気相中で, スラグと固体鉄あるいは Cu-Fe 系合金が平衡している. スラグ中の FeO, SiO₂ および CaO の質量%はそれぞれ 50, 28 および 22% である. この平衡に関係する反応および反応に伴う標準ギブス自由エネルギー変化は以下のようにあらわされる.



ここで T は絶対温度 [K] をあらわす.

以下の問に答えよ. ここでは, 気体定数 R を $8.3 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ とし, 値は有効数字 2 桁で記述せよ. ただし, 値が指数関数であらわされる場合は, 値を $n_1 \cdot \exp(n_2)$ (n_i は数値) として記述してもよい.

- 問 1 CO:CO₂ 比が 1:1 のとき 1570 K における酸素分圧 [atm] を求め, その値を書け.
- 問 2 このスラグ中の FeO のモル分率を求め, その値を書け. ただし式量として, FeO : 72, SiO₂ : 60, CaO : 56 を用いてもよい.
- 問 3 1570 K において, このスラグが純粋な固体鉄と共存するときの平衡酸素分圧を求め, その値を書け. ここでは 1570 K におけるスラグ中の FeO の活量係数を 1.1 と仮定する.
- 問 4 熔融 Cu-Fe 合金中の Fe 濃度が 1 mass% であり, スラグおよび雰囲気と平衡するときの平衡酸素分圧を求め, その値を書け. ただし 1570 K における Cu 中の Fe の無限希薄状態における固体鉄に対するラウール則基準の活量係数 γ° は 14 と仮定する. また, 原子量として, Fe : 56, Cu : 64 を用いてもよい.

【 材料物性－ 1 】

固体の比熱を，図 1 に示すような角振動数 ω で振動する N 個の独立な調和振動子モデル（アインシュタインモデル）にもとづいて考える． ε_n は調和振動子の n 番目のエネルギー準位であり，独立であるとは，各々の振動子は互いに相互作用しないという意味である． \hbar はディラック定数（プランク定数を 2π で割った定数）とし， k はボルツマン定数とする．以下の問に答えよ．

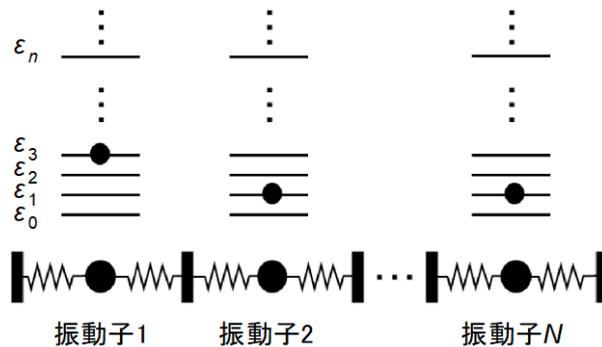


図 1 N 個の独立な調和振動子からなる系

- 問 1 零点振動を無視し， n 番目のエネルギー準位 ε_n を ω ， \hbar を用いて表せ．
- 問 2 温度 T における各々の振動子系の分配関数 z を求め，全系の分配関数 Z を自由度 3 を考慮して求めよ．
- 問 3 温度 T における全系のヘルムホルツ自由エネルギー F を求めよ．
- 問 4 温度 T における全系の内部エネルギー E を求めよ．必要であれば，ギブス・ヘルムホルツの式 $E = -T^2 \left(\frac{\partial(F/T)}{\partial T} \right)_V$ を用いてよい．ここで， V は全系の体積である．
- 問 5 この全系の比熱を求め，高温ではデュロン・プティの法則が成立することを示せ．
- 問 6 アインシュタインモデルでは高温比熱における温度依存性はよく説明できるが，低温比熱の温度依存性を説明することができない．一方，この問題を解決するために提案されたデバイモデルは，概ね実験的に求められる比熱の低温域における温度依存性を再現することができる．この差異を，これらのモデルの違いにもとづいて簡潔に説明せよ．

【材料物性－２】

物質の磁氣的性質について、以下の問に答えよ。

問 1 以下の空白①～⑥に入る言葉を記せ。また、空白⑦には適切な数値を有効数字 2 桁で記せ。

強磁性体の磁化 M [Wb/m^2] を磁場 H [A/m] に対して測定すると磁化曲線が得られ、その振る舞いは測定方向により異なる。このような性質を（ ① ）とよぶ。この振る舞いはさまざまな原因により発生し、例えば単結晶試料を測定すればその結晶軸方向に対する観測方向により特性が変化し、これは（ ② ）とよばれる。また、棒状試料や板状試料ではその形に起因して測定する方向によって異なる磁化が得られる。これは（ ③ ）とよばれる。これらは磁化の方向によってエネルギー状態が変化することに起因しており、このエネルギーを異方性エネルギーとよび、磁化は最もエネルギーの低い方向に向く。この方向を（ ④ ）軸とよび、一方、エネルギーの高い方向を（ ⑤ ）軸とよぶ。六方晶を有するコバルトのように、ある一つの方向のみが異方性エネルギーが低い状態である場合は（ ⑥ ）異方性とよばれる。図 1 に模式的に示すコバルトの磁化曲線において、反磁場の影響が無視できる場合、コバルトの異方性エネルギー K_u [J/m^3] は（ ⑦ ）と概算される。

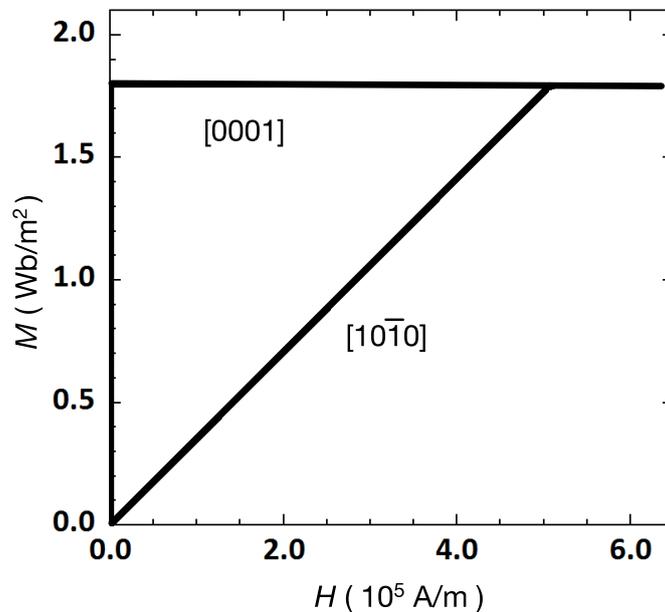


図 1 コバルト単結晶の各結晶方位における磁化の磁場依存性

(次ページに続く)

問2 以下の空白⑧～⑩に入る言葉を記せ。なお、空白⑨には数字が入る。

強磁性体において磁化が飽和する程度の大きさの磁場中 ($H > 0$) で磁化 M の温度変化を測ると図2のようになる。ここで、強磁性体は $\mu_B m$ の磁気モーメント (スピン) を有する N 個の原子から構成されるような簡単なモデルで示され、温度 T における磁化の振る舞いはスピン系の熱力学量によってのみ決まるとする。ここで、 μ_B はボーア磁子数である。絶対零度では完全にスピンの向きが揃っているが、温度 T が上昇するにつれてスピンの配列は徐々に乱れ、ある温度で完全にスピンのランダムに配列するようになる。この温度 T_i を (⑧) といい、この現象は (⑨) 次の次数を有する相転移である。この温度以上の磁気状態は (⑩) とよばれる。

問3 スピンが取りえる状態は磁場の向きに対して平行 ($-m$) と反平行 ($+m$) の二つの状態の場合しかなく、それぞれのエネルギーが

$$E^+ = -\mu_B m H$$

$$E^- = +\mu_B m H$$

と表されるとする。 T_i よりも高い温度領域にて、これらの状態をとる確率はボルツマン分布に従う。平行、反平行状態をとる確率 p_+ , p_- をボルツマン定数 k を用いて表せ。さらに、全磁化 M と温度 T の関係式を導け。なお、実験室系の温度域では $\mu_B m H \ll kT$ が成り立つ。

問4 問3で得た関係式にもとづき、 T_i の温度以上の磁化の振る舞いを定性的に説明せよ。

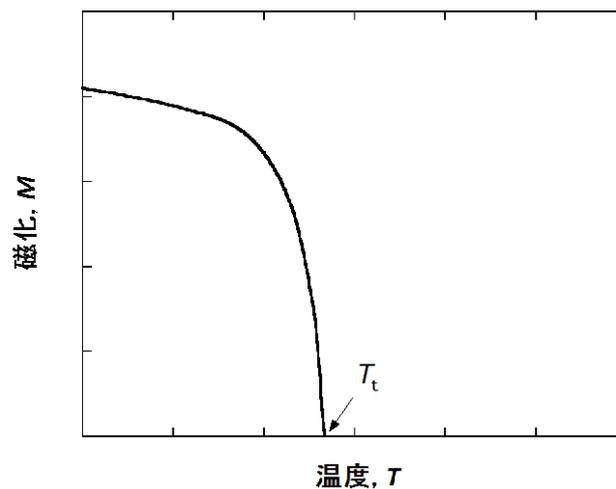


図2 強磁性体の磁化の温度依存性

【 材料加工－ 1 】

図1の様な二段ロールを用いた圧延加工において、被加工材がロールにかみこまれる場合を考える。被加工材の入口と出口の板厚を h_1 と h_2 、入口と出口の速度を V_1 と V_2 、ロール周速を V_R 、ロール半径を R 、素材がロールと接触する圧延方向の長さを L 、 L に対応するロール中心角を α 、被加工材がロールと最初に接触する点におけるロールから受ける力の大きさを F としたとき、以下の問に答えよ。

- 問1 ロール周速と被加工材の速度が一致する点を何と称するか記載せよ。
- 問2 問1の点を境に、入口側と出口側での V_1 、 V_2 、 V_R の大小関係を記載せよ。
- 問3 被加工材とロール間の摩擦係数を μ としたとき、被加工材がロールと接するだけでロールにかみ込まれるための条件を記載せよ。
- 問4 問3の被加工材がロールにかみ込まれるための条件から、圧延加工にはどのようなロールを選ぶのが有利かを記載せよ。

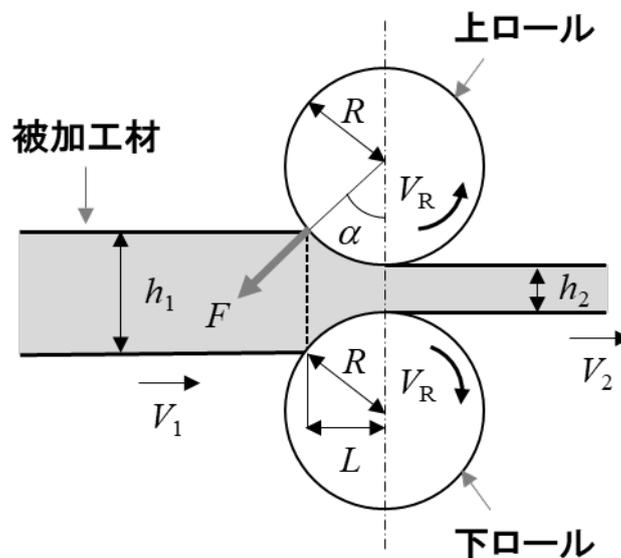


図1 二段ロールを使用した圧延加工時の被加工材とロールの側面図

【 材料加工－ 2 】

2つの材料，A 鋼（許容応力 900 MPa，破壊じん性 $60 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ）と B 鋼（許容応力 300 MPa，破壊じん性 $180 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ ）の無限平板内に，一様な応力 σ が作用するとき，次の問に答えよ．

- 問 1 図 1 に示す，直径 $0.18/\pi \text{ m}$ の貫通円孔（応力集中係数を 3 とする）がある場合，許容応力まで負荷できるとして，両材料で負荷できる引張応力は，それぞれいくらか．材料力学を使って求めよ．
- 問 2 図 2 に示す，長さ $0.18/\pi \text{ m}$ の貫通き裂がある場合，破壊じん性まで負荷できるとして，両材料で付加できる引張応力は，それぞれいくらか．破壊力学を使って求めよ．
- 問 3 歴史的に高張力鋼の利用拡大と共に大事故が多発した原因を，問 1，問 2 における A 鋼と B 鋼の強度比較を使って，論理的に考察せよ．
- 問 4 材料の静的破壊じん性を求める試験手順の骨子を説明し，破壊じん性とはどういう強度を表す材料定数か，簡単に説明せよ．

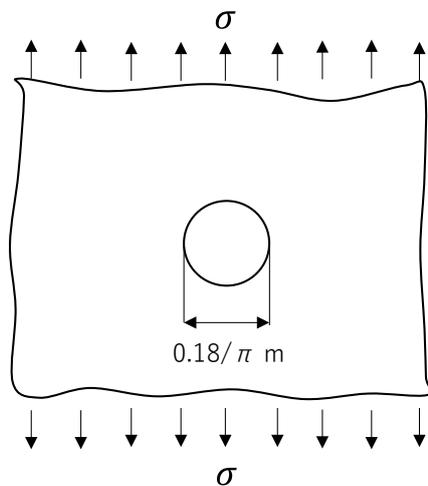


図 1 無限平板中の貫通円孔試験体

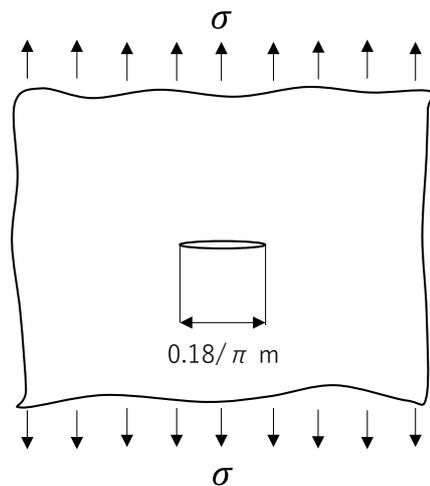


図 2 無限平板中の貫通き裂試験体